ECOLE NAVALE — MATHEMATIQUES II — 1975

I Dans le plan affine $\mathcal{R}^2$, rapporté au repère cartésien orthonormé $\left[o, \vec{u}(0), \vec{u}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$, étudier la courbe (C) définie par :

$$p \in (C) \quad : \quad \overrightarrow{op} = r\,\vec{u}(\theta) \quad , \quad r = \frac{1}{1 + \cos 2\theta} \; ;$$

$\vec{u}(\theta)$ étant un vecteur unitaire faisant l'angle θ avec le vecteur $\vec{u}(0)$.

Tracer le graphe de (C), et donner la valeur du rayon de courbure ρ au point p_1 obtenu lorsque $\theta = \frac{\pi}{6}$.

II Dans l'espace affine $\mathcal{R}^3$, rapporté au repère cartésien orthonormé $(e) = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on envisage la courbe gauche (H) définie par :

$$\forall M \in (H) \quad , \quad \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \quad , \quad \text{avec} : \quad \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$x = \frac{\cos\varphi}{1 + \cos 2\varphi} \quad , \quad y = \frac{\sin\varphi}{1 + \cos 2\varphi} \quad \text{et} \quad z = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{tg}\,\varphi.$$

1° Donner la valeur de la différentielle de l'abscisse curviligne $s(M)$

$$\left(\text{on choisira } \frac{ds}{d\varphi} > 0 \text{ pour } \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right).$$

2° Donner les cosinus directeurs de la tangente orientée à (H); on notera $\vec{T}$ un vecteur unitaire porté par cette tangente.

3° Déduire des résultats précédents, le rayon de courbure en M à (H), ainsi que le vecteur $\vec{N}$, unitaire, porté par la normale principale en M à (H).

4° Exprimer par ses composantes le vecteur $\vec{B}$, unitaire de la binormale en M à (H); en déduire la valeur de la torsion de la courbe (H) au point M.

III [On désigne par $\vec{V}(M/\lambda)$ le vecteur vitesse de M par rapport à un référentiel (λ)].

On envisage le repère cartésien orthonormé $(E) = (0, \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$, mobile par rapport au repère (e), (E) étant défini par :

$$\vec{E}_1 = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} \quad , \quad \vec{E}_2 \,.\, \vec{e}_3 = 0 \quad \text{et} \quad \|\vec{V}(M|\lambda)\| = C \quad (C = C^{te} \in \mathbb{R}^{*+}),$$

le point M étant défini dans la partie II, et (λ) le référentiel associé au repère (e) donné également dans la partie II du problème.

1° Exprimer $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ et $\vec{E}_3$ en fonction de φ, par leurs composantes dans la base vectorielle $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

2° Soit (Λ) le référentiel associé à (E); exprimer, par ses composantes dans la base vectorielle $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\}$, le vecteur de rotation instantanée de (E) par rapport à (e), vecteur que l'on note $\vec{\Omega}(\Lambda|\lambda)$.

3° Soit une tige matérielle [notée (S)] homogène, de longueur $2l$, dont les dimensions transversales sont négligeables devant l, et m la masse de (S). On astreint ce solide à avoir une extrémité fixée en O, et l'autre A liée à l'axe $(O, \vec{E}_1)$. Déterminer l'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport au référentiel (λ).

Nota. — Il est rappelé aux candidats que, si $(b) = (K, \vec{u})$ est le repère de l'espace des instants (tel que $\|\vec{u}\| = 1$ seconde), on appelle référentiel les couples

$$(\lambda) = (e, b) \quad \text{et} \quad (\Lambda) = (E, b).$$

D'autre part, l'énergie cinétique d'un solide (S) ayant un point O, lié au repère (e), s'écrit :

$$E_c(S|\lambda) = \frac{1}{2} \int_{P \in S} (\vec{\Omega}(\Lambda|\lambda) \wedge \overrightarrow{OP})^2 \, dm(P).$$

(Λ) et (λ) étant définis ci-dessus.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail